« Missing data in physics » workshop

Nice, May 11th. & 12th. 2015

Influence of irregular nodes spacing in noisy rational interpolation

Jean-Daniel Fournier

with CNRS

at ARTEMIS Lab

UNS / CNRS / OCA

Coworker : M Pindor (†)

Influence of irregular nodes spacing in noisy rational interpolation

To the lowest order in the noise amplitude, a certain 'Froissart' Polynomial (FP) governs the statistics of the additional zeros and poles in stochastically perturbed rational interpolation.

The FP is actually a random polynomial and there is an interplay between the noise, the pattern of the interpolation nodes and the statistical pattern of the roots of the FP.

Donner une formule fermée
pour les RA (PA, RI ou autres) de $f = \varphi + g$

$$\tilde{f} = \frac{P_p}{Q_q} = [p/q]_f \approx f$$

rationnelle

ou plus précisément

simple traceur ("power counting") du calcul ; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
<u>À la fin</u> on spécifiera $0 < \varepsilon \ll 1$ qui est le régime asymptotique approprié pour formuler et prouver le premier acte du phénomène de Froissart

$$\tilde{f}_\varepsilon \approx f_\varepsilon = \varphi + \varepsilon\, g$$

rationnelle
$\varphi = \dfrac{T_m}{B_n}$

aléatoire avec des hypothèses probabilistes convenables

Il est commode d'introduire cette hypothèse dès le début, cela simplifie certaines preuves, et après tout c'est ce problème qui nous intéresse ici : AVEC ALEA

<u>Notations</u>

$p = m + k$
$q = n + k'$

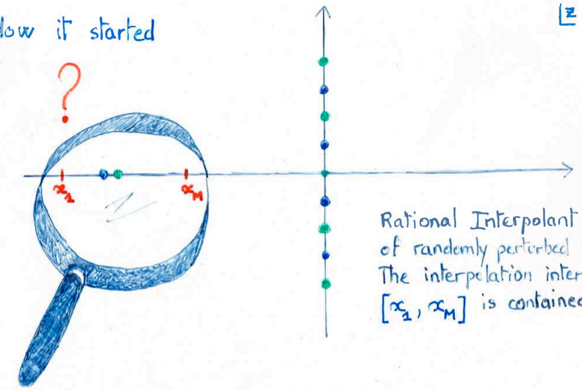
On se cantonnera en général à la classe $k = k' \in \mathbb{N}^*$

~~Speaker : Jean-Daniel FOURNIER, Nice, France.~~

~~Co-worker : Maciej PINDOR, Warsaw, Poland.~~

~~Sincere thanks to our colleagues at UI Antwerpen for undertaking the organization of this meeting, very useful so far.~~

How it started



Rational Interpolant of randomly perturbed $th(z)$. The interpolation interval $[x_1, x_M]$ is contained in $\mathbb{R}_-^*$

Tv, mars 2003

(3)

TOY MODEL

$\varphi \equiv \Phi$ interpolé par $f_{1/1}$

$\varphi \equiv \Phi \quad m = n = 0 \quad k = k' = 1 \quad p = q = 1 \quad M = 3$

Points $\quad g-1 \quad g \to e \quad g \to 1$

$\qquad\qquad z_1 \quad z_2 \quad z_3$

$$\tilde{f}_\varepsilon(z)\Big|_{z_j} = \frac{P_p(z)}{Q_q(z)}\Big|_{z_j} = (1+\varepsilon r_j)\,\varphi(z)\Big|_{z_j}$$

s'écrit alors

$$\begin{cases} p_0 + (g-1)p_1 - (1+\varepsilon r_1)(g-1)q_1 = (1+\varepsilon r_1)(q_0\Phi) \\ p_0 + (g+e)p_1 - (1+\varepsilon r_2)(g+e)q_1 = (1+\varepsilon r_2)(q_0\Phi) \\ p_0 + (g+1)p_1 - (1+\varepsilon r_3)(g+1)q_1 = (1+\varepsilon r_3)(q_0\Phi) \\ \tilde{f}_\varepsilon(z) = \Phi\,\dfrac{p_1 z + p_0}{q_1 z + 1} \end{cases}$$

Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & g-1 & -(1+\varepsilon r_1)(g-1) \\ 1 & g+e & -(1+\varepsilon r_2)(g+e) \\ 1 & g+1 & -(1+\varepsilon r_3)(g+1) \end{vmatrix} = -\varepsilon \begin{vmatrix} 1 & (g-1) & r_1(g-1) \\ 1 & (g+e) & r_2(g+e) \\ 1 & (g+1) & r_3(g+1) \end{vmatrix} = -\varepsilon\Delta_0$$

$$p_0 = \frac{\varepsilon\Delta_a + \varepsilon^2\Delta_b}{\varepsilon\Delta_0} \qquad p_1 = \frac{\varepsilon\Delta_c + \varepsilon^2\Delta_d}{\varepsilon\Delta_0}$$

$$q_1 = \frac{\varepsilon\Delta_e}{\varepsilon\Delta_0} \qquad \text{avec} \quad \Delta_a = \Delta_0 \;;\; \Delta_c = \Delta_e$$

$$\boxed{\tilde{f}_\varepsilon = \Phi\,\frac{p_1 z + p_0}{q_1 z + 1} = \Phi\,\frac{K_1(z) + \varepsilon\,\overline{P}_1(z)}{K_1(z)}}$$

$$K_1(z) = \Delta_a + \Delta_c z \qquad \overline{P}_1(z) = \Delta_b + \Delta_d z$$

Dans la variable $\xi = z - g$, le polynôme de Froissart s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned} K_1(\xi) = {} & r_3 - r_1 + e(r_3 - 2r_2 + r_1) \\ & - 1\left[(1-e)r_1 - 2r_2 + (1+e_2)r_3\right]\xi \end{aligned}}$$

T_{v_2} mars 2003

Dans la variable $\xi = z - g$, le polynôme de Froissart s'écrit

$$\boxed{K_1(\xi) = r_3 - r_1 + e(r_3 - 2r_2 + r_1) - [(1-e)r_1 - 2r_2 + (1+e_2)r_3]\,\xi}$$

TOY MODEL

$\{r\}$ r.v. i.i.d. g. c. n.

$$\rho(\xi) = \mathbb{E}\left[\delta(\xi - \xi_*)\right] \quad \text{avec } K_1(\xi_*\,; r's) = 0$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\Lambda}\frac{1}{1 + (\xi - \xi_c)^2/\Lambda^2}}$$

$$\xi_c = e\,\frac{4}{3}\,\frac{1}{1+(e/\sqrt{3})^2}\,,\quad \Lambda^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{(1-e^2)}{1+(e/\sqrt{3})^2}\,,\quad -1 \leq e \leq 1$$

$$\boxed{\mathcal{P}\left\{\xi_* \in [z_1, z_3]\right\} = \int_{-1}^{+1} \rho(\xi)\,d\xi = \frac{2}{3} \text{ (indépendante de } e)}$$

EXEMPLES DE RESULTATS NON ELEMENTAIRES

$\Rightarrow$ Cas où φ est une fraction rationnelle $[m/n]$ quelconque ; on a une formule exacte pour l'interpolant

$$f^{(m+k)}_{(n+k)}(z) = \frac{P_{m+k}(z)}{Q_{n+k}(z)} = \frac{T_m(z)K_k(z) + \varepsilon \sum_{\ell=0}^{n} \varepsilon^{\ell}\, \overline{P}^{(\ell)}_{m+k}(z)}{B_n(z)K_k(z) + \varepsilon \sum_{\ell=0}^{m-1} \varepsilon^{\ell}\, \overline{Q}^{(\ell)}_{n+k}(z)}$$

qui assure le phénomène de Froissart : doublets d'élongation évanescente

$\Rightarrow$ Cas où $k=1$ $\quad K_1(z; \{r's\})$ est obtenu exactement

Une loi de Cauchy subsiste $\forall m\ \forall n$

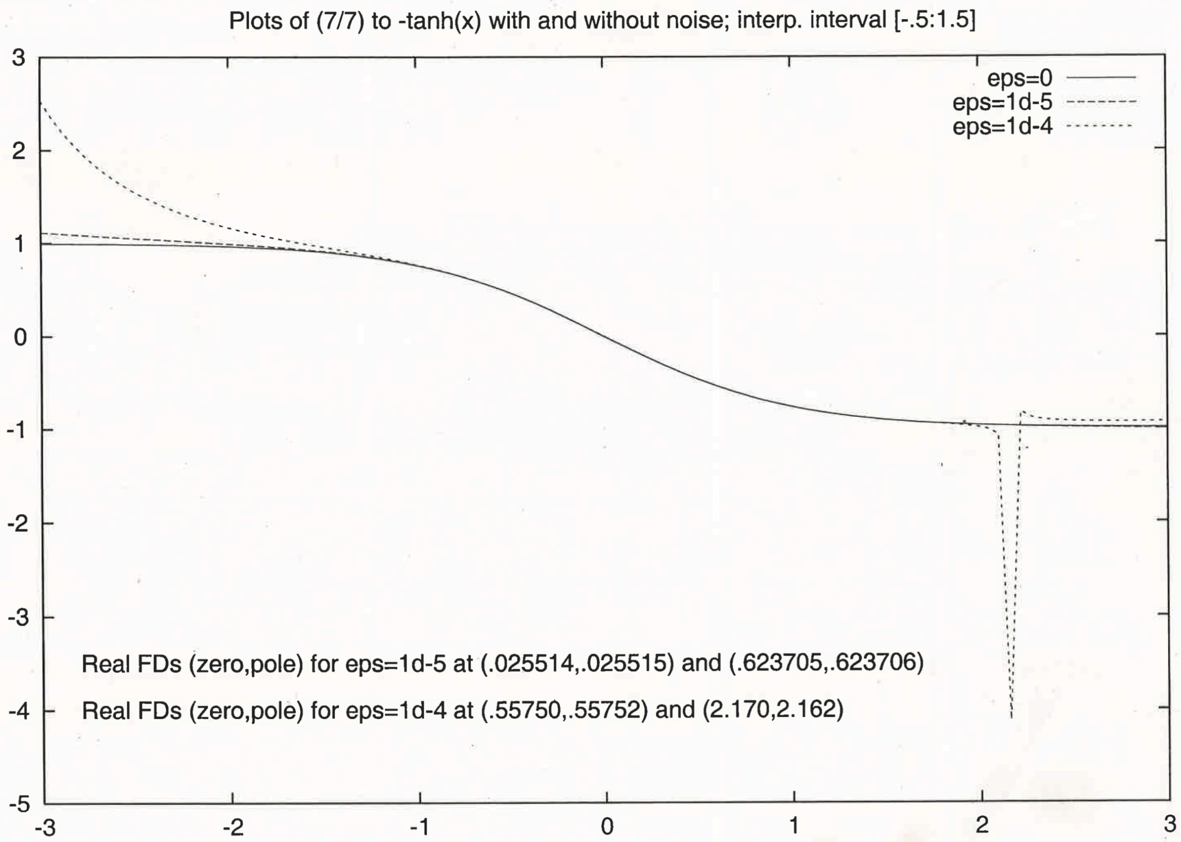
$$\rho(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\Lambda}\frac{1}{1 + (\xi - \xi_c)^2/\Lambda^2}$$

et $\mathcal{P}\left\{\xi_* \in [z_1, z_m]\right\} \geqslant \frac{1}{2}$

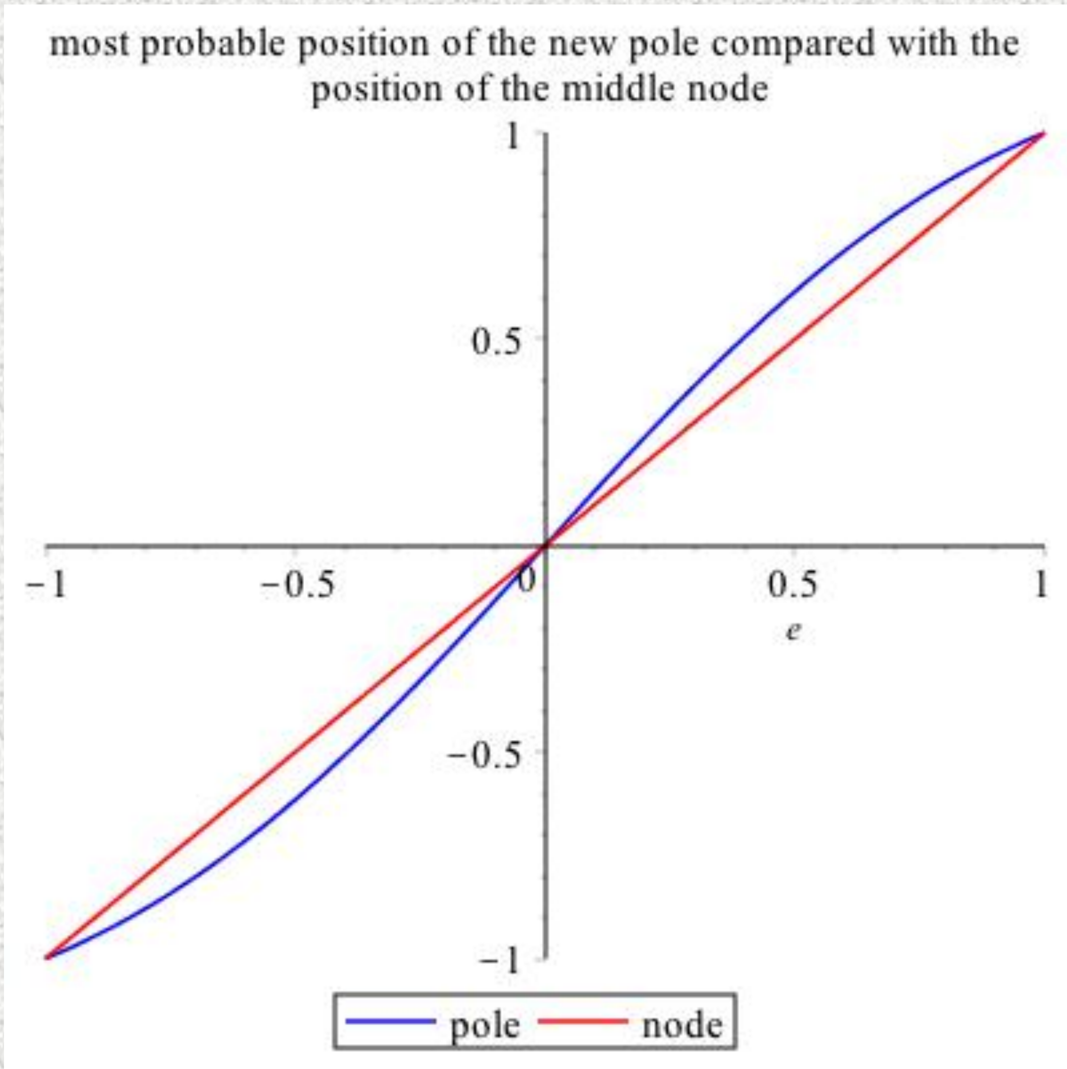
RESULTATS NUMERIQUES POUR $k \geq 1$

Les doublets se localisent dans le voisinage complexe ($\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) ou réel (composante singulière sur $\mathbb{R}$) de l'intervalle d'interpolation.

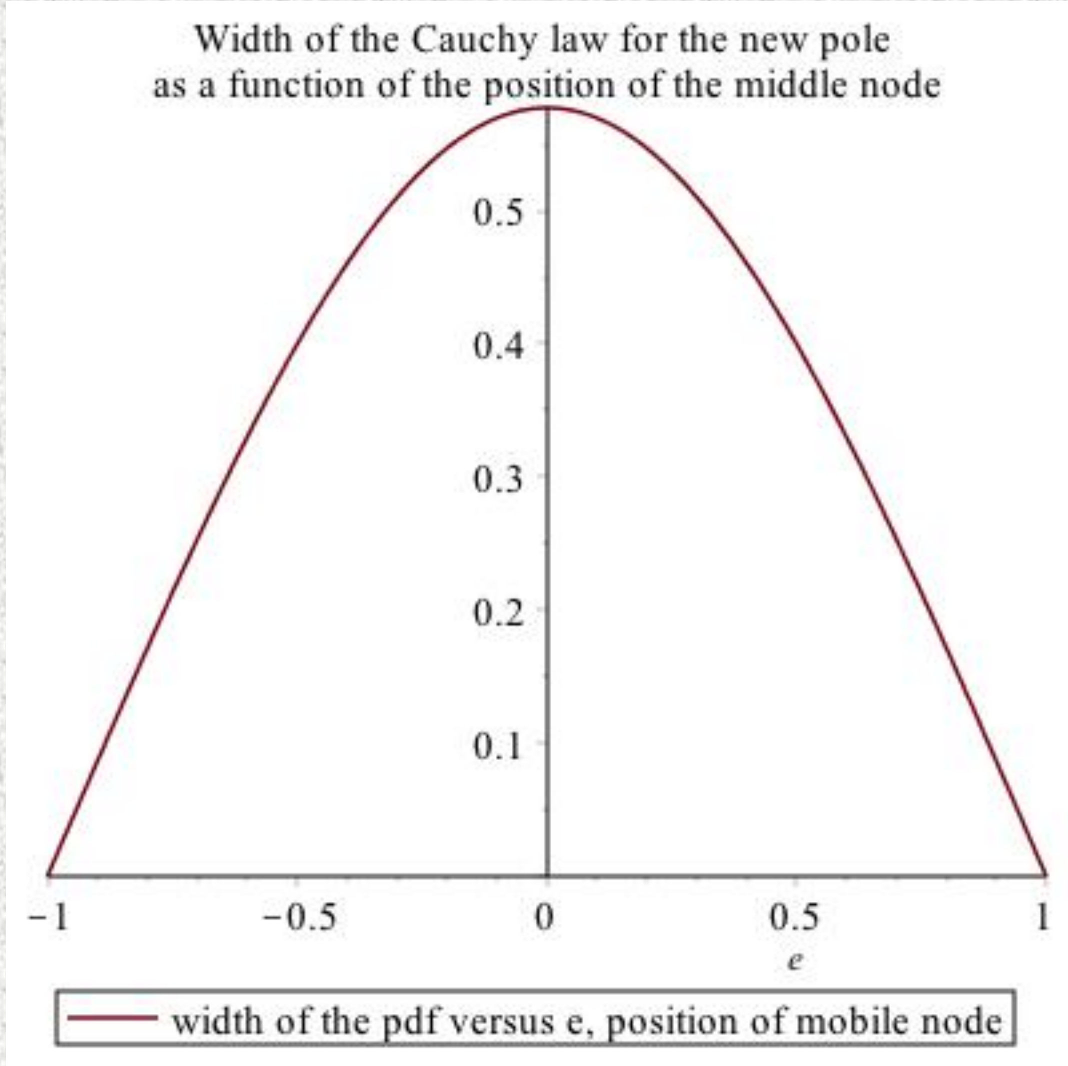
Maciej 5
bruité



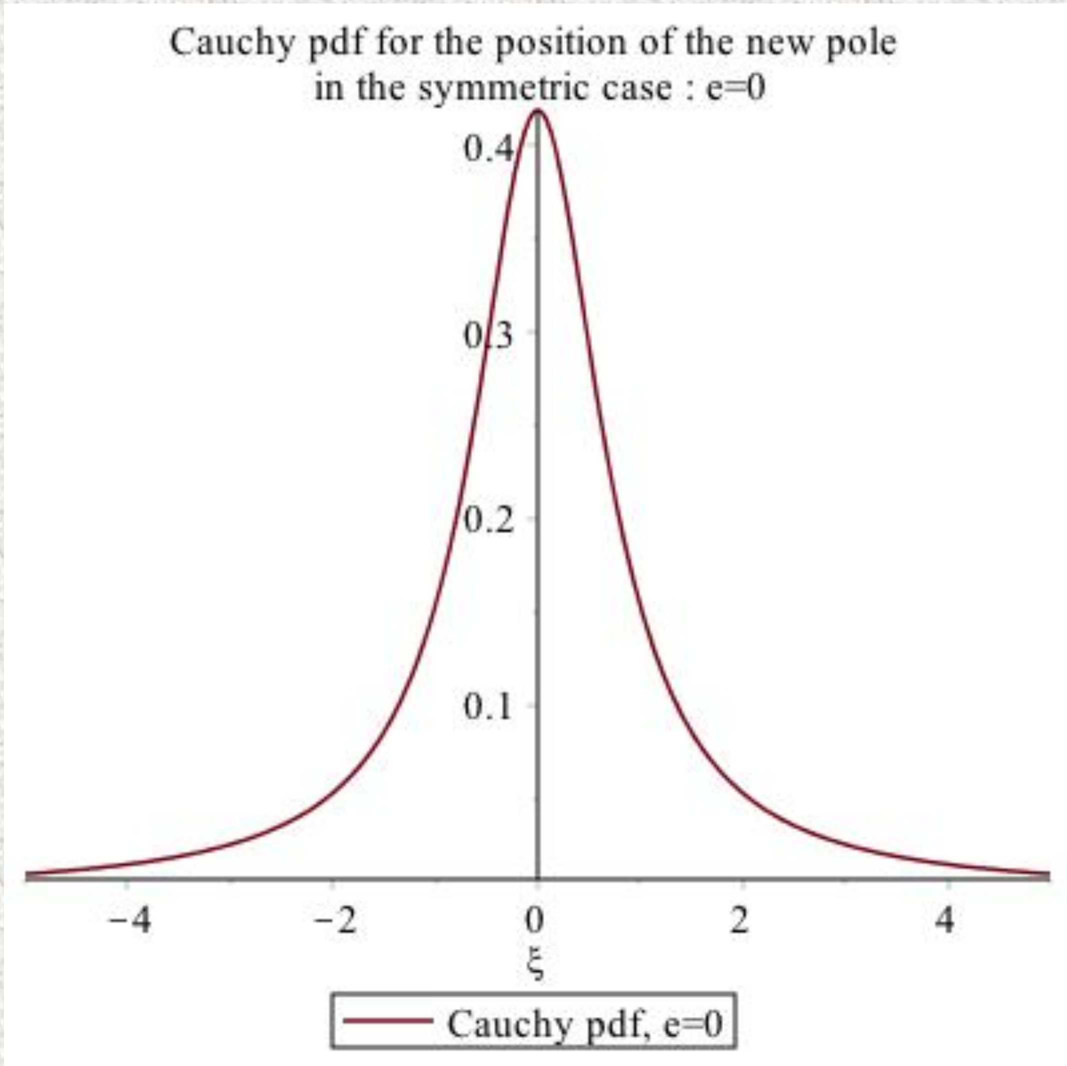
plot([4e/(e^2+3), e], e = -1 .. 1, color = [blue, red]);



plot(sqrt(3)(-e^2+1)/(e^2+3), e = -1 .. 1)



plot(subs(e = 0, rho(xi)), xi = -5 .. 5)



plot(subs(e = .99, rho(xi)), xi = -5 .. 5)